

Exercice : 1

Dans l'étude du traitement préventif de l'ostéoporose par administration transdermique d'une hormone estrogène, on admet que la variation de la concentration sanguine y de cette hormone vérifie :

$$(E) \quad \frac{dy}{dt} + ay = b e^{-t} \quad \text{avec } y(0)=3$$

où $a=1$ et $b=2$ sont des constantes, et t le temps. Exprimez la concentration sanguine y en fonction du temps.

Exercice : 2

En étudiant l'injection d'une substance S dont le métabolisme fait intervenir des rétroactions, on montre qu'un modèle mathématique simplifié du phénomène fournit l'équation différentielle :

$$(E) \quad C''(t) + 2C'(t) + 2C(t) = 2$$

où, dans un système convenable d'unités, $C(t)$ représente la concentration de la substance dans l'organisme, en fonction du temps t .

1. a Déterminez l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :

$$(E_0) \quad C''(t) + 2C'(t) + 2C(t) = 0$$

b) Déterminez l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) .

2. a Déterminez la solution $y(t)$ de (E) qui vérifie les conditions initiales :

$$y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = \lambda.$$

b) On suppose $\lambda > 0$ (λ est proportionnel à la quantité totale injectée).

Étudiez les variations de la fonction $t \mapsto y(t)$ sur $[0, +\infty[$.

c) Déterminez la valeur du minimum global de $y(t)$ sur $[0, +\infty[$.

Quelle condition faut-il imposer à λ pour que ce minimum soit supérieur à 0,5 ?